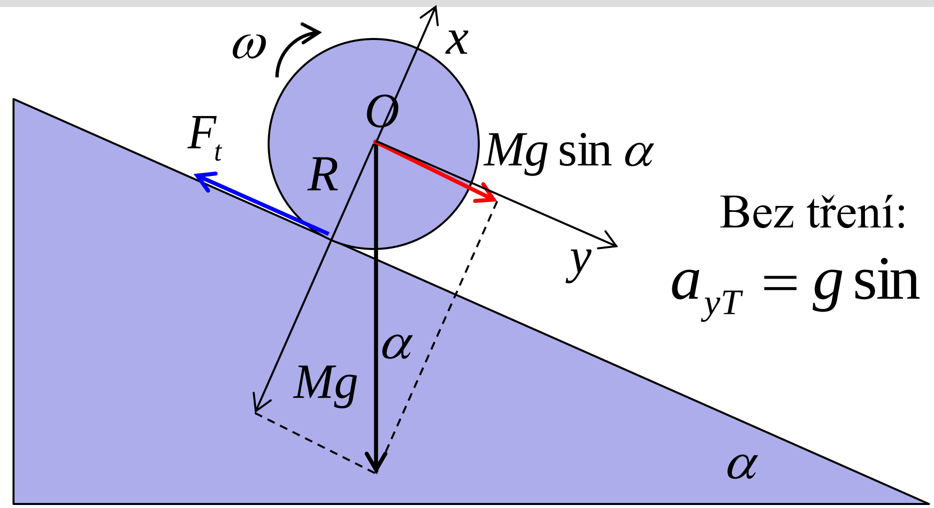
Valení po nakloněné rovině

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_T \qquad \text{(1. impulsová věta)}$$

$$M\vec{a}_T = \vec{F}_g + \vec{F}_t$$

$$Ma_{yT} = Mg\sin\alpha - F_t$$



Bez tření:

$$a_{yT} = g\sin\alpha$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(2. impulsová věta)}$$

$$M_z = \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)_z = xF_y - yF_x = RF_t$$

rychlost hmotného středu $v_{yT} = \dfrac{s}{T} = \omega R$

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{J_z}{R}\frac{\mathrm{d}v_{yT}}{\mathrm{d}t} = \frac{J_z}{R}a_{yT}$$

$$M_z = \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} \Rightarrow F_t = \frac{J_z}{R^2}a_{yT}$$

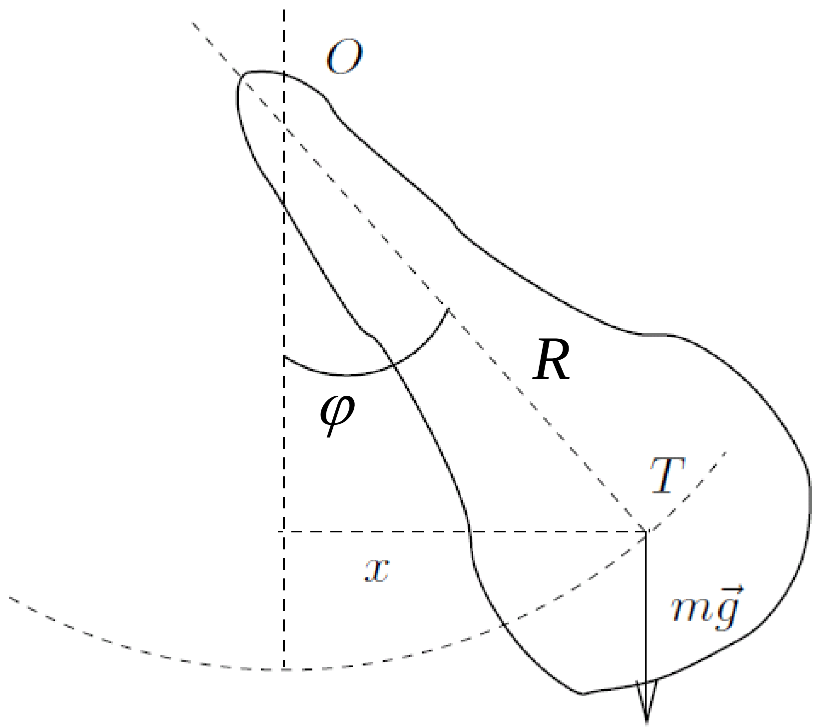
$$Ma_{yT} = Mg\sin\alpha - \frac{J_z}{R^2}a_{yT}$$

$$\boxed{a_{yT} = \frac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{J_z}{MR^2}}}$$

homogenní válec: $J_z = \dfrac{1}{2}MR^2 \Rightarrow a_{yT} = \dfrac{g\sin\alpha}{1+1/2} = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$

homogenní koule: $J_z = \dfrac{2}{5}MR^2 \Rightarrow a_{yT} = \dfrac{g\sin\alpha}{1+2/5} = \dfrac{5}{7}g\sin\alpha$

Fyzické kyvadlo



$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(2. impulsová věta)}$$

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M$$

$$M = -mgR\sin\varphi \qquad \text{Pro malé } \varphi\text{:}\ \sin\varphi \cong \varphi$$

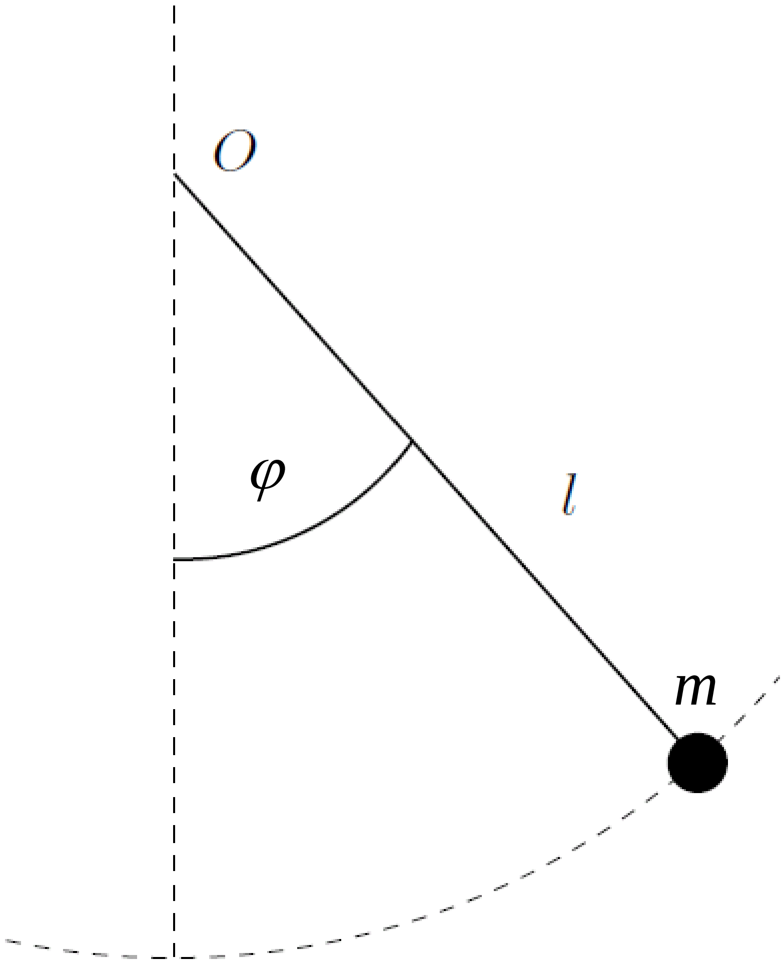
$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgR\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgR}{J}\varphi = 0$$

$$\varphi = \Phi\sin(\Omega t + \alpha), \quad kde \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgR}{J}}$$

Zavedeme redukovanou délku kyvadla:

$$l_R = \frac{J}{mR} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l_R}{g}} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgR}}$$

Matematické kyvadlo



$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(2. impulsová věta)}$$

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M$$

$$M = -mgl\sin\varphi \qquad \text{Pro malé } \varphi\text{:}\ \sin\varphi \cong \varphi$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0$$

$$\varphi = \Phi\sin(\Omega t + \alpha), \quad kde \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

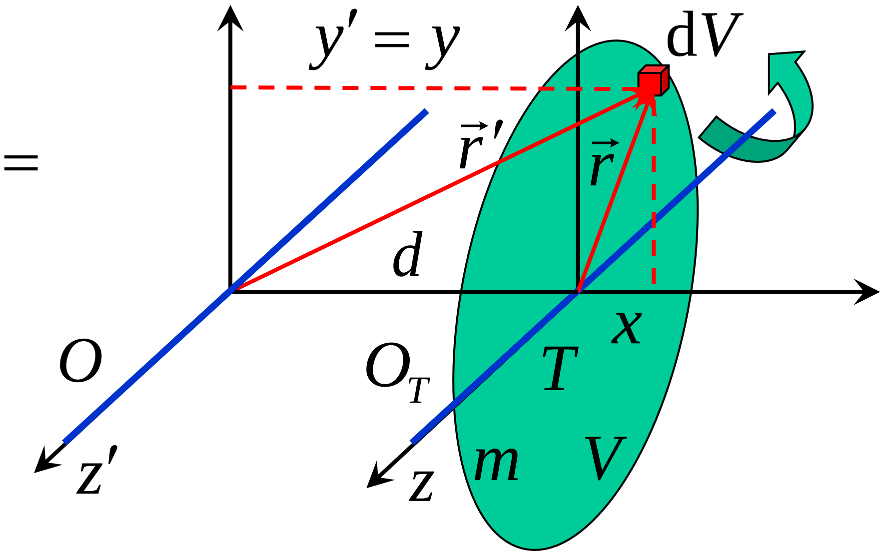
$$J = ml^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Steinerova věta (rovnoběžné osy)

• Moment setrvačnosti kolem osy $O \,//\, O_T \,//\, z$

$$J = \int_V r'^2 \rho \mathrm{dV} = \int_V \left((x+d)^2 + y^2\right)\rho \mathrm{dV} =$$

$$= \int_V \left(x^2 + 2xd + d^2 + y^2\right)\rho \mathrm{dV}$$



Jelikož jsme zvolili soustavu souřadnou v hmotném středu (těžišti) tělesa, potom:

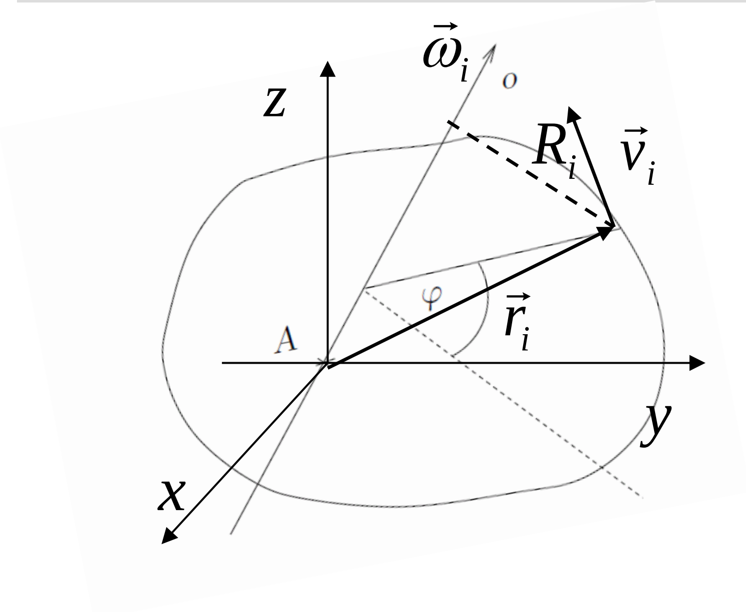
$$2d\int_V x\rho \mathrm{dV} = 0 \qquad J = \int_V \left(x^2 + d^2 + y^2\right)\rho \mathrm{dV} = d^2\int_V \rho \mathrm{dV} + \int_V r^2 \rho \mathrm{dV}$$

$$\boxed{J = md^2 + J_0}$$

moment setrvačnosti hmotného středu vzhledem k ose O

moment setrvačnosti vůči rovnoběžné ose otáčení O_S procházející hmotným středem

Opakování - Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- Obecnějším pohybem tuhého tělesa je pohyb, při kterém pouze jeden jeho bod *A* zachovává v tělese i prostoru stálou polohu. Tento pohyb nazýváme **rotací tuhého tělesa kolem pevného bodu**.
- Zavedeme vektor úhlové rychlosti, jehož směr je shodný s osou otáčení, která se může měnit s časem, pak podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa dána vzorcem :

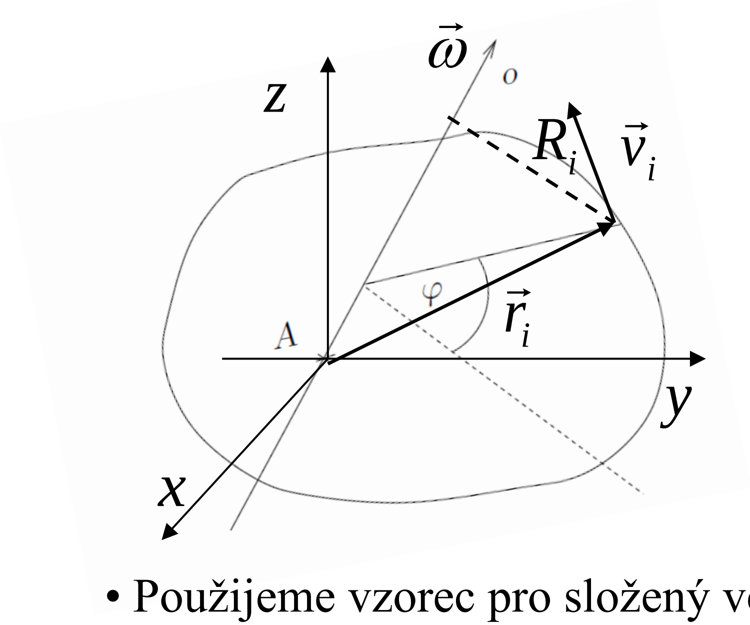
$$\vec{v} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}, \quad v = \omega r \sin\alpha = \omega R$$

- Pohyb při kterém mají všechny body tuhého tělesa stejný vektor rychlosti nazýváme posuvným nebo-li translačním pohybem: $\vec{v}_T = \vec{v}_T(t)$

- Podle **Chaslesovy věty** lze libovolný pohyb tuhého tělesa složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu. Rychlost libovolného bodu tuhého tělesa lze určit složením rychlosti jednoho libovolného bodu *A* tělesa a rychlosti dané otáčením kolem tohoto bodu:

$$v(t) = \vec{v}_T(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa kolem pevného bodu dána vzorcem :

$$\vec{v}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t), \quad v_i = \omega r_i \sin\alpha = \omega R_i$$

• Potom moment hybnosti celého tělesa je dán vztahem:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$$

• Použijeme vzorec pro složený vektorový součin: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

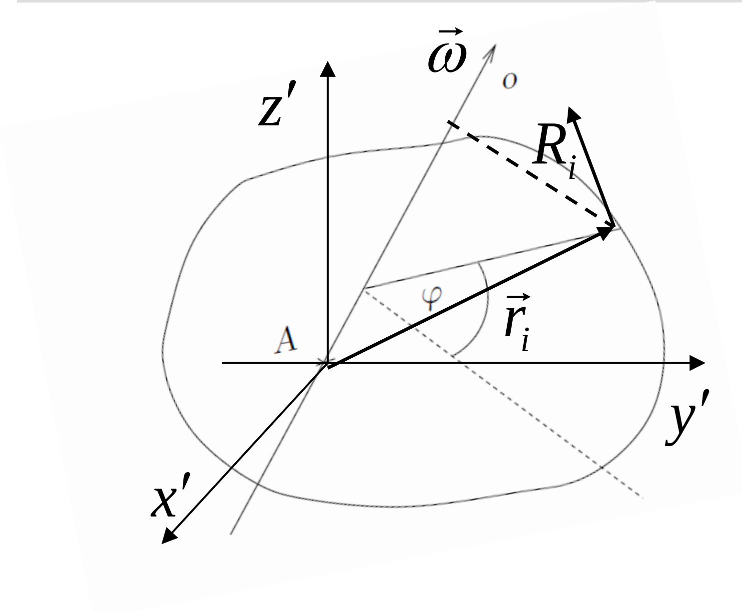
• a pro moment hybnosti celého tělesa dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i\right]$$

• Celkový moment hybnosti není obecně rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti. Toto je příčina složitého chování tuhých těles při rotaci kolem pevného bodu. Navíc jsou všechny tři veličiny v tomto vztahu časově závislé: $\vec{B} = \vec{B}(t), \vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

• Nelze tedy zavést časově nezávislý moment setrvačnosti jako v případě otáčení kolem pevné osy.

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem. Počátek této soustavy zvolíme v počátku laboratorní soustavy. Označíme-li v soustavě pevně spojené s rotujícím tělesem složky vektorů:

$$\vec{B} \equiv (\beta_x, \beta_y, \beta_z),\ \vec{r}_i \equiv (x_i', y_i', z_i'),\ \vec{\omega} \equiv (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$$

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

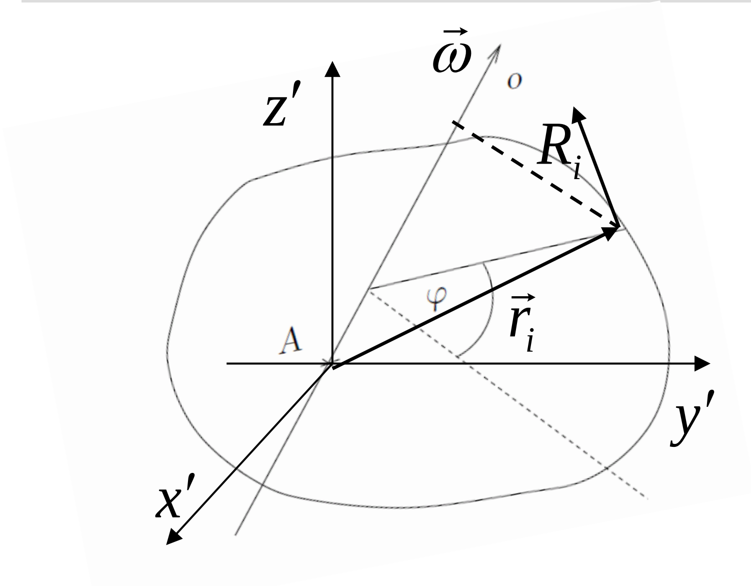
• Potom můžeme vektorovou rovnici rozepsat na složky:

$$\beta_x = \Omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i'^2 + z_i'^2 \right) - \Omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i' - \Omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i'$$

$$\beta_y = -\Omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i' + \Omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + z_i'^2 \right) - \Omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i'$$

$$\beta_z = -\Omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i' - \Omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i' + \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_z \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right)$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z}^{3} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

• A pro složky tenzoru setrvačnosti tedy dostaneme:

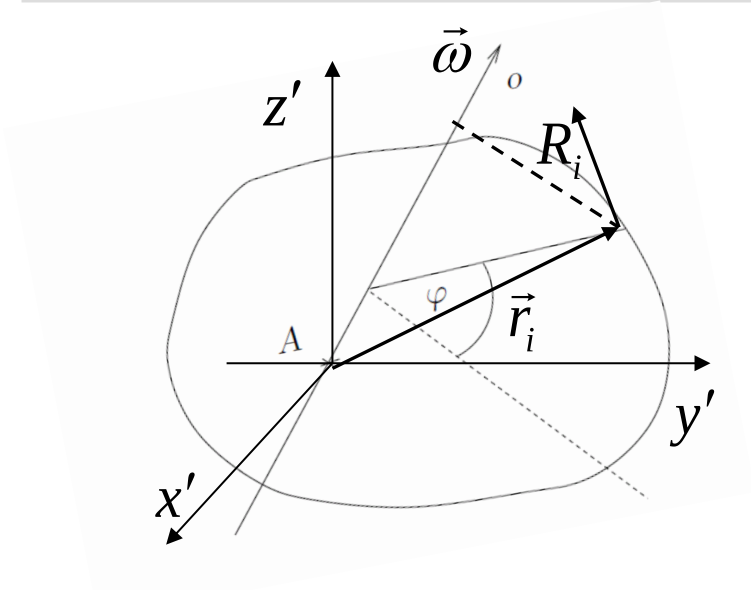
Momenty setrvačnosti vzhledem k příslušným osám soustavy souřadné otáčející se s tělesem

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xy} = J_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i'$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xz} = J_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i'$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right), \quad J_{yz} = J_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i'$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i \right) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z}^{3} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

• A pro složky tenzoru setrvačnosti tedy dostaneme:

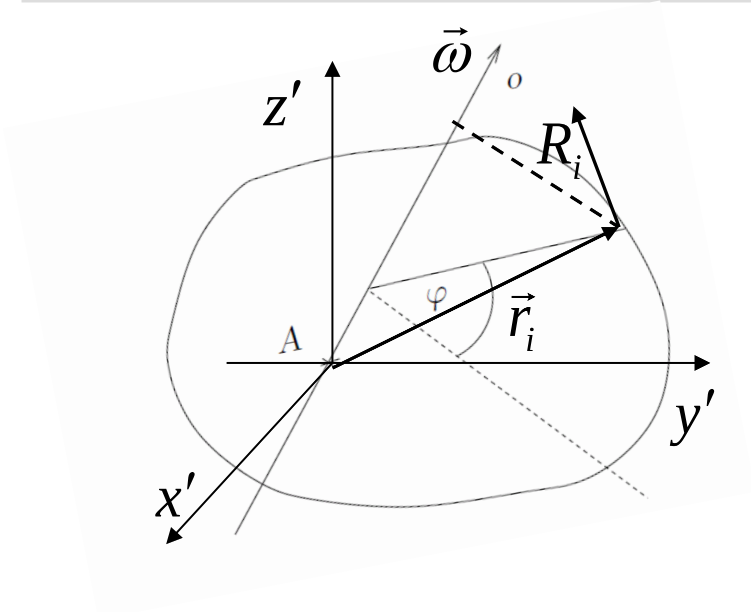
$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xy} = J_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i'$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xz} = J_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i'$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right), \quad J_{yz} = J_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i'$$

Deviační momenty, souvissející s momenty odstředivých sil, které působí na okamžitou osu rotace tělesa

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Moment setrvačnosti je tedy tenzorová veličina. Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický tenzor 2. řádu:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

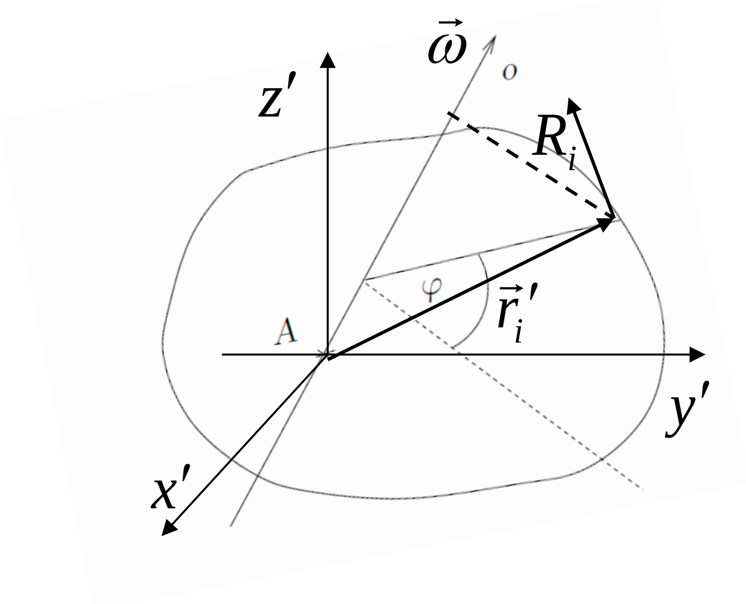
• Soustavu souřadnou spjatou s tělesem lze zvolit tedy tak, aby deviační momenty byly rovny nule. Vektor hybnosti lze potom psát jako:

$$\vec{B} = J\vec{\omega}, \quad tedy \quad \beta_i = J\,\Omega_i \quad \Rightarrow \quad J\,\Omega_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij}\Omega_j, \quad kde \quad i, j = x, y, z = 1,2,3$$

• Soustavu rovnic rozepíšeme:

$$\begin{array}{ccc} (J_{xx} - J)\Omega_x + & J_{xy}\Omega_y + & J_{xz}\Omega_z = 0 \\ J_{xy}\Omega_x + & (J_{yy} - J)\Omega_y + & J_{yz}\Omega_z = 0 \\ J_{xz}\Omega_x + & J_{yz}\Omega_y + & (J_{zz} - J)\Omega_z = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} J_{xx} - J & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{xx} - J & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{xx} - J \end{vmatrix} = 0$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



- Rozepíšeme-li determinant dostaneme kubickou rovnici, která má tři reálné kořeny, pokud má tenzor momentu setrvačnosti reálné složky. Reálné kořeny (vlastní hodnoty) označíme:

$$J_1, J_2, J_3$$

- Pro každý kořen dostaneme z rovnice jeden vektor úhlové rychlosti (vlastní vektory). Tyto tři vektory jsou navzájem kolmé – **hlavní osy tenzoru setrvačnosti**:

$$\vec{\Omega}_1 \perp \vec{\Omega}_2 \perp \vec{\Omega}_3,$$

$$\vec{B}_k = J_k \vec{\Omega}_k, \quad tedy \quad \vec{B}_k \,//\, \vec{\Omega}_k \quad kde \quad k = 1,2,3$$

- Zvolíme-li soustavu souřadnou spjatou s tělesem ve směru těchto vektorů úhlových rychlostí (vlastních vektorů), potom jsou deviační momenty tenzoru setrvačnosti nulové. Momentům setrvačnosti ve směru hlavních os říkáme **hlavní momenty setrvačnosti** :

$$J_{xx} = J_1, \quad J_{yy} = J_2, \quad J_{zz} = J_3,$$

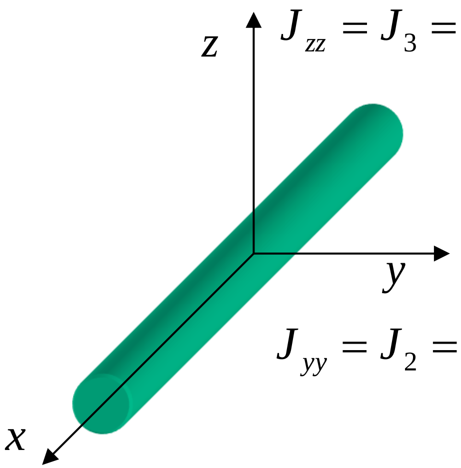
Moment setrvačnosti

- **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti tělesa odpovídají význačným osám symetrie zkoumaného tělesa

- každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
  - J vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
  - J vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem

- př. Tyč délky l a kruhového průřezu o poloměru r:

$$J_{zz} = J_3 = \frac{1}{12} M l^2$$

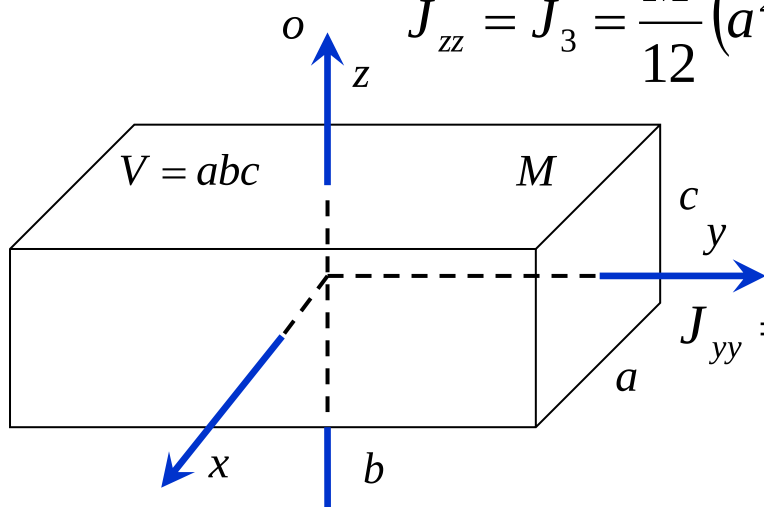


$$J_{yy} = J_2 = \frac{1}{12} M l^2$$

$$J_{xx} = J_1 = \frac{1}{2} M r^2$$

Kvádr o rozměrech a, b, c:

$$J_{zz} = J_3 = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$



$$J_{yy} = J_2 = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

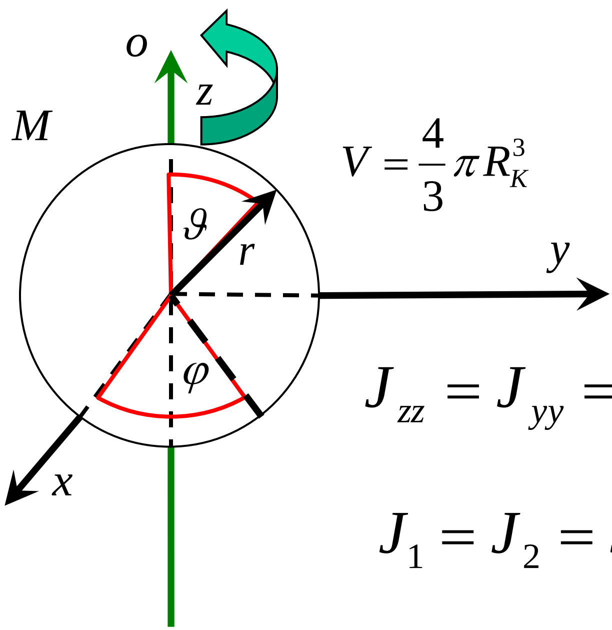
$$J_{xx} = J_1 = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

Moment setrvačnosti

- **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti tělesa odpovídají význačným osám symetrie zkoumaného tělesa

- každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
  - J vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
  - J vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem

- př. Koule o poloměru R_K

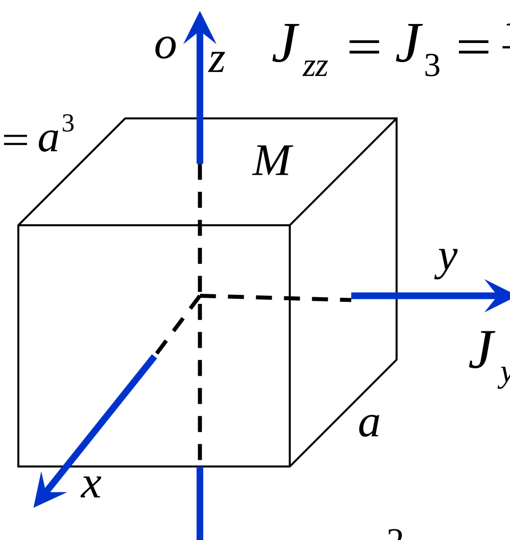


$$V = \frac{4}{3}\pi R_K^3$$

$$J_{zz} = J_{yy} = J_{xx} = \frac{2}{5} M R_K^2$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5} M R_K^2$$

Krychle o se stranou o velikosti a:



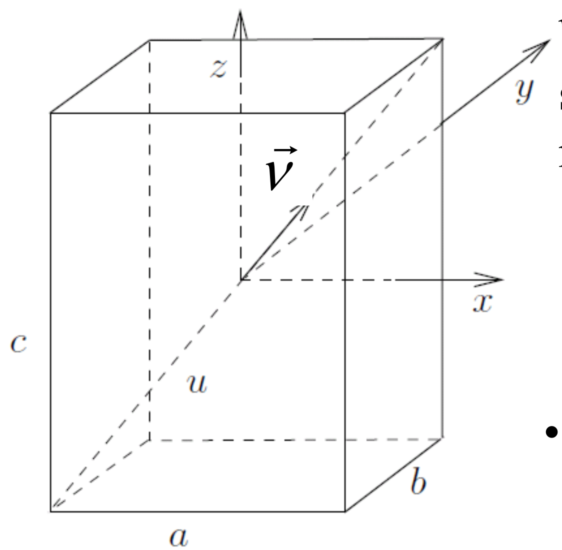
$$V = a^3$$

$$J_{zz} = J_3 = \frac{Ma^2}{6}$$

$$J_{yy} = J_2 = \frac{Ma^2}{6}$$

$$J_{xx} = J_1 = \frac{Ma^2}{6}$$

Tuhé těleso –moment setrvačnosti vůči libovolné ose tělesa



• Určíme si teď moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející bodem pro nějž známe tenzor setrvačnosti. Pokud zvolíme soustavu souřadnou v hlavních osách tenzoru momentu setrvačnosti budou nenulové pouze složky ležící na diagonále:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}_H = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

• Průmět vektoru celkového momentu hybnosti do směru osy otáčení je stejná veličina jak v soustavě pevně spojené s tělesem, tak v soustavě pevné v prostoru:

$$\vec{v}\vec{B} = J\omega, \, tedy \sum_{i=x,y,z} v_i \beta_i = J\omega \Rightarrow \sum_{i=x,y,z} v_i \sum_{j=x,y,z} J_{ij}\Omega_j = J\omega, \, kde \; i, j = x, y, z$$

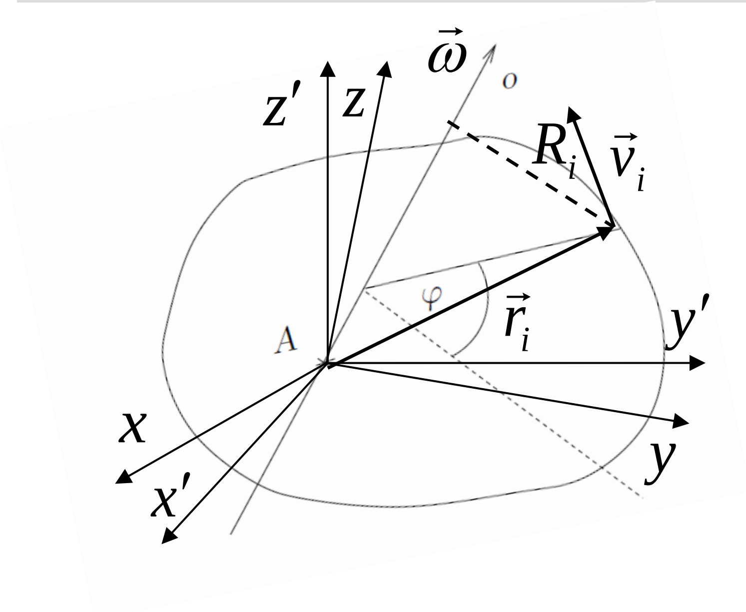
• Při otáčení kolem pevné osy má vektor úhlové rychlosti směr této osy:

$$\vec{\omega} = \vec{v}\omega, \, tedy \; \Omega_j = v_j \omega \Rightarrow J\omega = \omega \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} v_i v_j J_{ij} \Rightarrow J = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} v_i v_j J_{ij}$$

• Jelikož jsou deviační složky nulové dostaneme:

$$J = v_x^2 J_1 + v_y^2 J_2 + v_z^2 J_3$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \vec{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

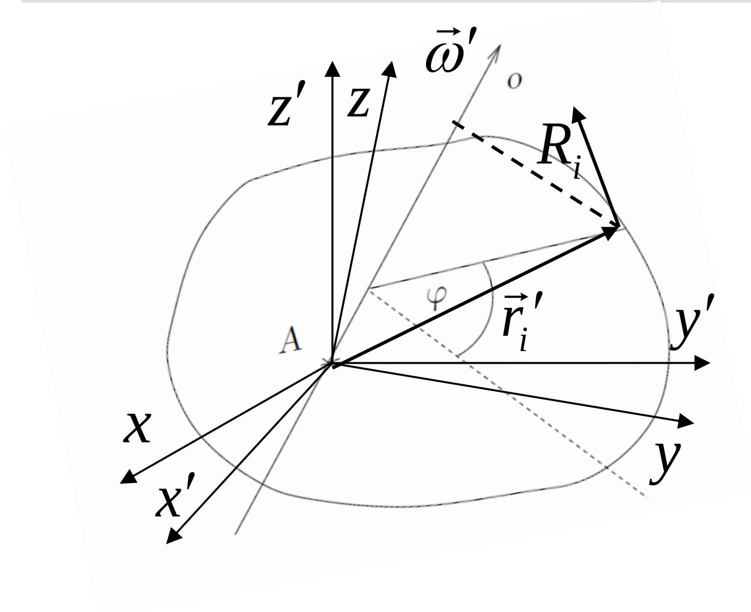
• Přechod od soustavy pevně spojené s tělesem k soustavě pevné v prostoru:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{T}} = 0, \quad \vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{T}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$analogicky: \quad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{T}} = \vec{\omega} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{T}} + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \quad \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{T}} + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}, \quad kde \quad \vec{M} \equiv (\mu_x, \mu_y, \mu_z)}$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

• Rozepíšeme poslední rovnici do složek:

$$\frac{\mathrm{d}\beta_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \beta_z - \Omega_z \beta_y = \mu_x$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \beta_x - \Omega_x \beta_z = \mu_y$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x \beta_y - \Omega_y \beta_x = \mu_z$$

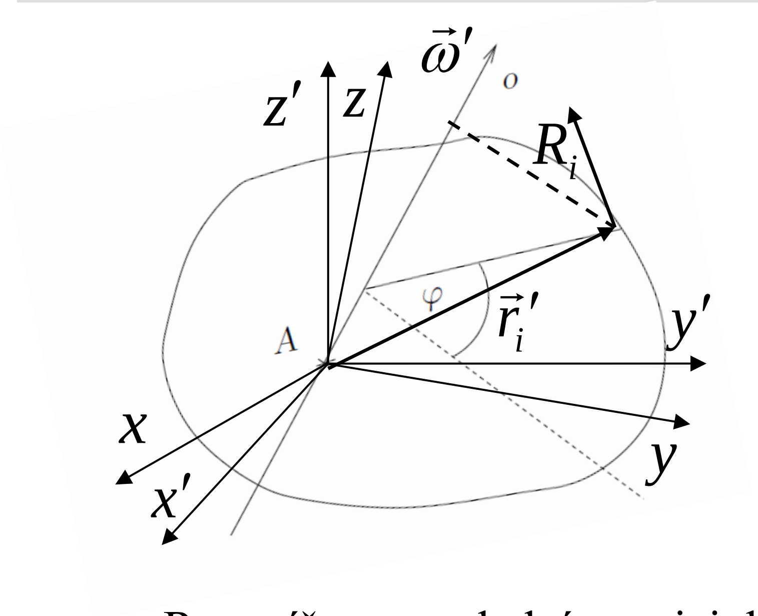
• dosadíme složky tenzoru setrvačnosti:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\beta_x = J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_x}{\mathrm{d}t} = J_{xx} \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + J_{xy} \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + J_{xz} \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t}$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

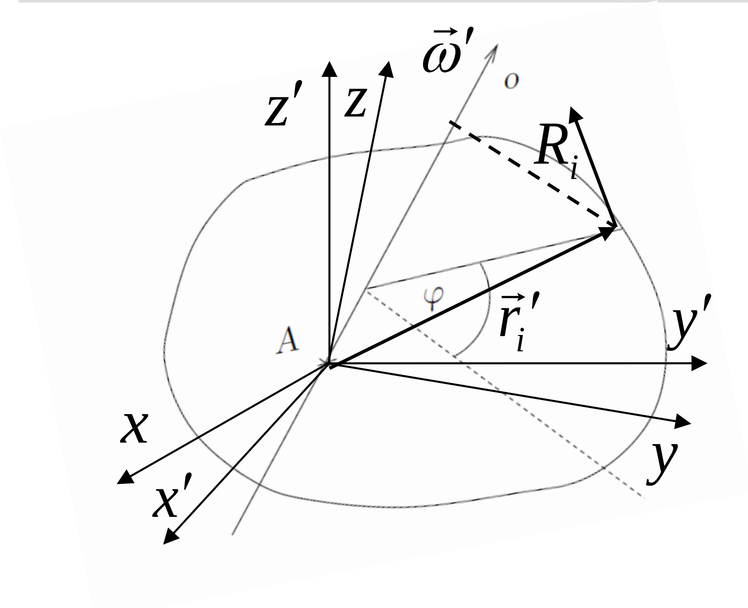
• Rozepíšeme poslední rovnici do složek:

$$J_{xx} \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + J_{xy} \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + J_{xz} \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_y (J_{zx}\Omega_x + J_{zy}\Omega_y + J_{zz}\Omega_z) - \Omega_z (J_{yx}\Omega_x + J_{yy}\Omega_y + J_{yz}\Omega_z) = \mu_x$$

$$J_{yx} \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + J_{yy} \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + J_{yz} \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_z (J_{xx}\Omega_x + J_{xy}\Omega_y + J_{xz}\Omega_z) - \Omega_x (J_{zx}\Omega_x + J_{zy}\Omega_y + J_{zz}\Omega_z) = \mu_y$$

$$J_{zx} \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + J_{zy} \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + J_{zz} \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x (J_{yx}\Omega_x + J_{yy}\Omega_y + J_{yz}\Omega_z) - \Omega_y (J_{xx}\Omega_x + J_{xy}\Omega_y + J_{xz}\Omega_z) = \mu_z$$

Otáčení kolem pevného bodu - Eulerovy rovnice



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i \right) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

• Zvolím-li soustavu souřadnou spjatou s tělesem v hlavních osách tenzoru setrvačnosti:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

•Dostaneme **Eulerovy rovnice**:

$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z \left(J_3 - J_2 \right) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \Omega_x \left(J_1 - J_3 \right) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x \Omega_y \left(J_2 - J_1 \right) = \mu_z$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

•**Eulerovy rovnice**:

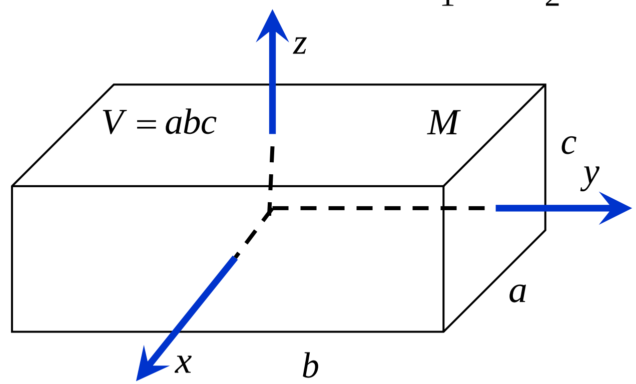
$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z \left(J_3 - J_2\right) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \Omega_x \left(J_1 - J_3\right) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x \Omega_y \left(J_2 - J_1\right) = \mu_z$$

• **Setrvačník** - těleso otáčející se kolem pevného bodu:

• **Asymetrický setrvačník** - všechny tři hlavní momenty setrvačnosti různé: $J_1 \neq J_2 \neq J_3$

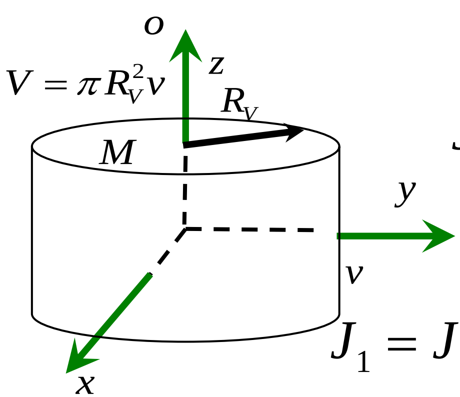


$$J_1 = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

$$J_2 = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

$$J_3 = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

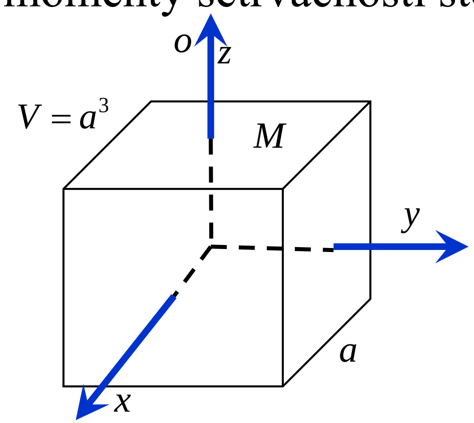
• **Symetrický setrvačník** - dva hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 \neq J_3$



$$J_3 = \frac{MR_V^2}{2}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{v^2}{12} + \frac{R_V^2}{4}\right)$$

• **Kulový setrvačník**-všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 = J_3$



$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{Ma^2}{6}$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

•**Eulerovy rovnice**:

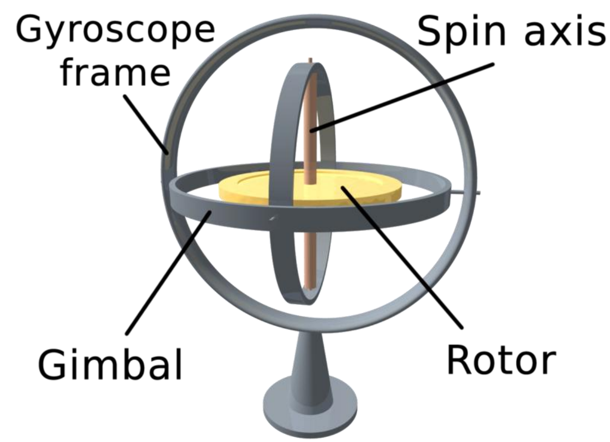
$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z \left(J_3 - J_2\right) = \mu_x$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \Omega_x \left(J_1 - J_3\right) = \mu_y$$

$$J_3 \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} + \Omega_x \Omega_y \left(J_2 - J_1\right) = \mu_z$$

• **Volný (bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



• **Kulový setrvačník**-všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 = J_3 = J$

$$J \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad J \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} = 0, \quad J \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_x = konst, \quad \Omega_y = konst, \quad \Omega_z = konst.,$$

$$\beta_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij} \Omega_j \Rightarrow \beta_x = J\Omega_x, \beta_y = J\Omega_y, \beta_z = J\Omega_z \Rightarrow \vec{B} = J\vec{\omega}$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• Moment hybnosti je tedy násobkem vektoru úhlové rychlosti:

$$\vec{B} = J\vec{\omega}$$

• Nezávisí na volbě soustavy souřadnic, platí tedy i pro soustavu souřadnou pevnou v prostoru.

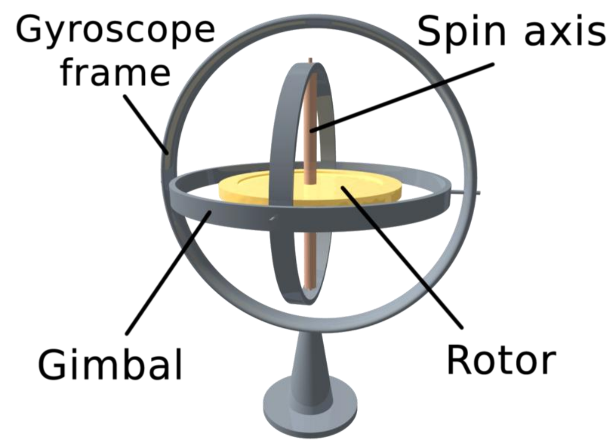
• Z druhé věty impulzové:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \vec{B} = konst \Rightarrow \vec{\omega} = konst$$

• Volný kulový setrvačník rotuje kolem své libovolné osy stálou úhlovou rychlostí, přičemž osa je v prostoru i v tělese po celou dobu pohybu stálá.

• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• **Symetrický setrvačník** - budeme předpokládat, že osou rotace je z-ová osa souřadnic : $J_1 = J_2 \neq J_3$

$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z \left(J_3 - J_1\right) = 0$$

$$J_1 \frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} + \Omega_z \Omega_x \left(J_1 - J_3\right) = 0$$

$$J_3 \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \Omega_z = konst.$$

• Rovnice upravíme:

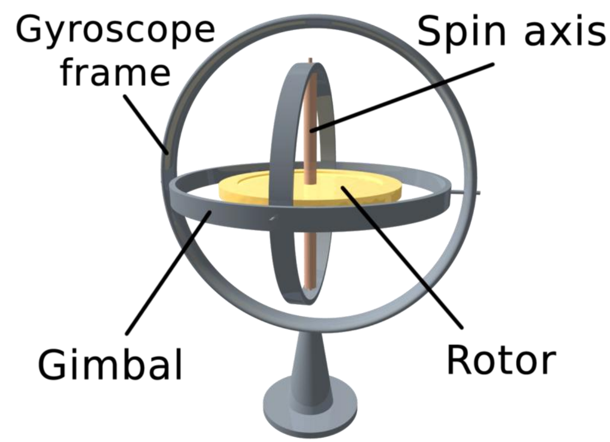
$$\frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} + \Omega_y \Omega_z \frac{J_3 - J_1}{J_1} = 0 \quad \Rightarrow \Omega_y = -\frac{1}{\Omega} \frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_y}{\mathrm{d}t} - \Omega_x \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\Omega_x}{\mathrm{d}t^2} + \Omega^2 \Omega_x = 0$$

$$\Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = \Omega = konst.$$

• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• Rovnice formálně stejná jako pro harmonický kmit:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Omega_x}{\mathrm{d}t^2} + \Omega^2\Omega_x = 0$$

$$\Omega_x = A\sin(\Omega t + \alpha)$$

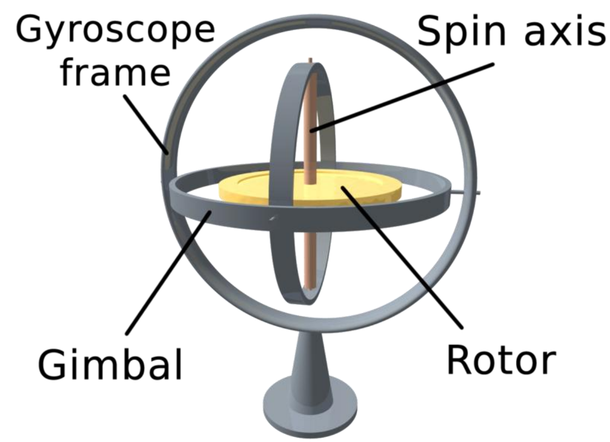
$$\Omega_y = -\frac{1}{\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega_x}{\mathrm{d}t} = -A\cos(\Omega t + \alpha)$$

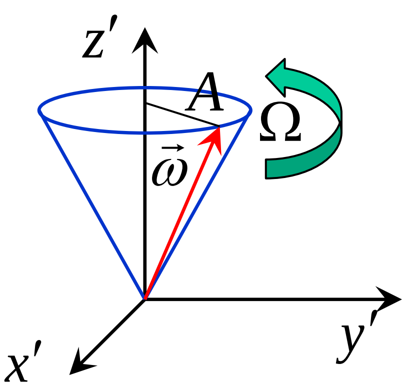
• Počáteční podmínky:

$$\vec{\omega}(t=0) = (\Omega_{0x}, \Omega_{0y}, \Omega_{0z})$$

• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.





• Rychlost **precese**:

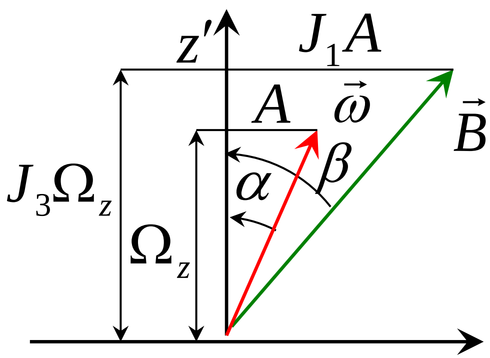
$$\Omega = \Omega_z \frac{J_1 - J_3}{J_1} = konst.$$

$$\Omega_x^2 + \Omega_y^2 = A^2\left[\sin^2(\Omega t + \alpha) + \cos^2(\Omega t + \alpha)\right] = A^2$$

Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

- Pro složky momentu hybnosti dostaneme:

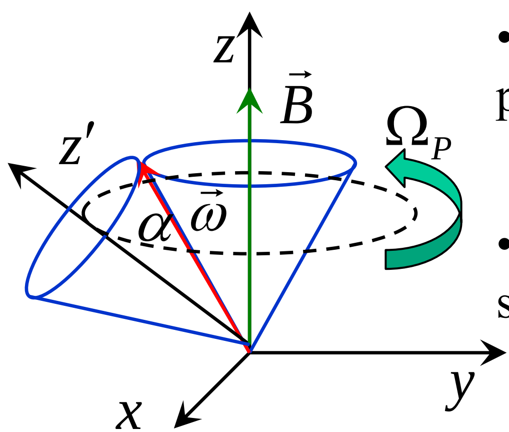
$$\beta_x = J_1\Omega_x,\ \beta_y = J_1\Omega_y,\ \beta_z = J_3\Omega_z$$



- **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$

V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

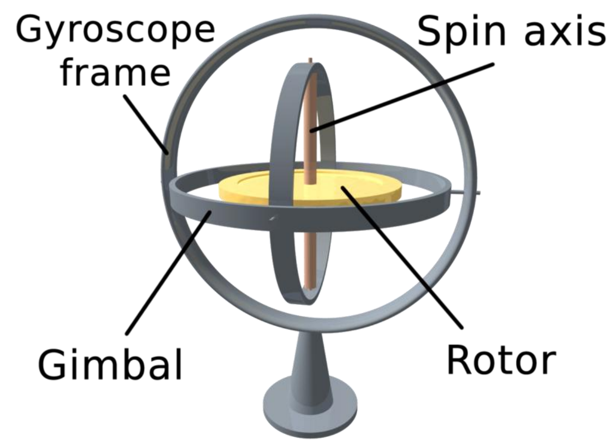
- např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



- vektor momentu hybnosti je pevný v prostoru: $\dfrac{d\vec{B}}{dt} = 0$

- Rychlost precese osy symetrie setrvačníku v prostoru:

$$\Omega_P = \omega \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$



Volný symetrický setrvačník - Eulerovy rovnice

• speciální volba počátečních podmínek:

$$\Omega_x = A\sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_y = -A\cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\Omega_{0x} = \Omega_{0y} = 0, \quad \Omega_{0z} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0, \quad \Omega_x = \Omega_y = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_x = \beta_y = 0, \quad \beta_z = J_z \Omega_z$$

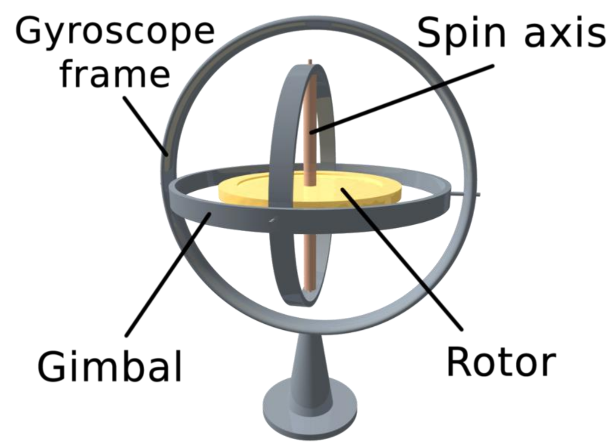
• vektor momentu hybnosti je rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti a pevný v prostoru:

$$\vec{B} // \vec{\omega}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = 0$$

• Osa otáčení má v tělese i prostoru stálý směr a setrvačník kolem ní rotuje konstantní úhlovou rychlostí: $\omega = \Omega_z$

• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.



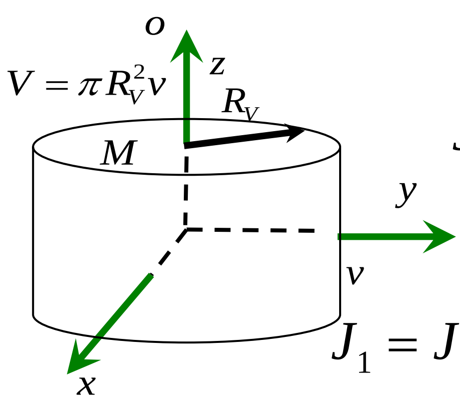
Volný symetrický setrvačník – volná osa

• Osa tělesa, vůči níž může těleso udržovat stálou rotaci, se nazývá **volná osa.** U kulového setrvačníku jsou volné všechny osy procházející hmotným středem. U symetrického setrvačníku jsou volné jak osa symetrie tělesa, tak všechny osy kolmé na osu symetrie procházející hmotným středem.

• **Volný(bezsilový) setrvačník** – setrvačník, na který nepůsobí vnější síly: $\vec{\mu} = \vec{M} = 0$
V tíhovém poli ho můžeme realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středu (těžišti).

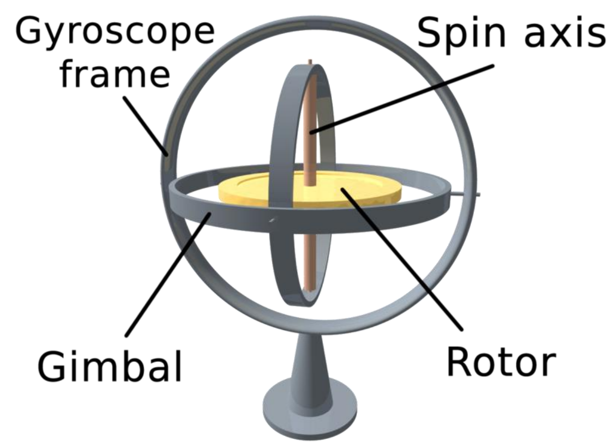
• např. **Kardanův závěs** –setrvačník je uchycen tak, že umožňuje libovolné natočení tělesa setrvačníku, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed (těžiště) setrvačníku ve středu kruhů Kardanova závěsu může se setrvačník pohybovat jako volný.

• **Symetrický setrvačník** - dva hlavní momenty setrvačnosti stejné: $J_1 = J_2 \neq J_3$

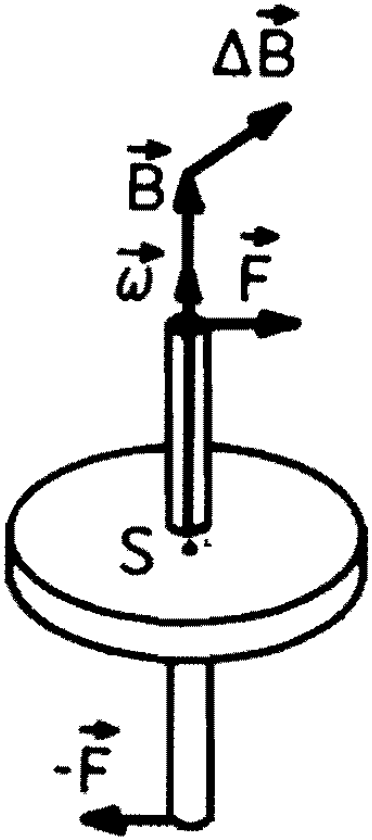


$$J_3 = \frac{MR_V^2}{2}$$

$$J_1 = J_2 = M\left(\frac{v^2}{12} + \frac{R_V^2}{4}\right)$$



Symetrický setrvačník



• Osa otáčení setrvačníku má směr celkového momentu hybnosti. Chceme-li osu otáčení setrvačníku vychýlit, musíme na něj působit nenulovým :

$$\vec{M} \neq 0$$

• Směr momentu sil je kolmý k vektoru momentu hybnosti a ke směru působících sil.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{B} = \vec{M}\Delta t$$

• Přírůstek momentu hybnosti je rovnoběžný s momentem sil a tedy kolmý k vektoru momentu hybnosti. V prvním přiblížení se tedy nemění velikost momentu hybnosti, ale pouze jeho směr.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{T}} + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

• Před působením momentu síly je:

$$\vec{\omega} \,//\, \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{T}}$$

• Změna momentu hybnosti je v prostoru a v tělese stejná.